UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

COMISSÃO COORDENADORA DO VESTIBULAR

PROCESSO SELETIVO UFES 2015

As bancas elaboradoras esperam obter da maioria dos candidatos respostas como as que seguem. No entanto, para a correção das provas, outras respostas também poderão ser consideradas, desde que corretas.

MATEMÁTICA

1ª QUESTÃO

A) Se d é a quantidade de pacotes e x, y e z são as quantidades de camisas, calças e pares de sapatos, em cada pacote, respectivamente, então se tem $x \cdot d = 2160$, $y \cdot d = 1800$ e $z \cdot d = 1200$. Assim, d é divisor comum de 2160, 1800 e 1200, logo o máximo valor de d é o máximo divisor comum de 2160, 1800 e 1200, que é 120. Para $d = 120$, tem-se $x = \frac{2160}{120} = 18$, $y = \frac{1800}{120} = 15$ e $z = \frac{1200}{120} = 10$.

B) Para formar um conjunto com 1 camisa, 1 calça e 1 par de sapatos, há l possíveis escolhas para 1 camisa. Uma vez escolhida 1 camisa, há m possíveis escolhas para 1 calça. Uma vez escolhida 1 camisa e 1 calça, há n possíveis escolhas para 1 par de sapatos. Assim, a quantidade de escolhas, que ele pode fazer, de um conjunto de três elementos, formado por 1 camisa, 1 calça e 1 par de sapatos, é igual a $l \cdot m \cdot n$.

2ª QUESTÃO

A) O vasilhame de 600 ml do sabão C custa 12 reais. Logo seu preço por ml é $\frac{12}{600}$ reais por ml. Em cada lavagem de roupas com o sabão C, Sofia gasta 30 ml do produto. Portanto, ela gasta $30 \cdot \frac{12}{600}$ reais $= 0{,}60$ reais $= 60$ centavos de reais.

B) Quando $n = 1$, Sofia gasta, em cada lavagem de roupas com o sabão D, $100 \cdot 100 \cdot \frac{24}{3000} = 80$ centavos de reais, que é maior do que 60 centavos de reais.

Quando $1 < n \leq 10$, ela gasta $100 \cdot 100 \cdot \frac{\left(1 - \frac{3n}{100}\right) \cdot 24}{3000} = 80 \cdot \left(1 - \frac{3n}{100}\right)$ centavos de reais. Para que Sofia gaste menos com o sabão D do que com o C, é preciso que $80 \cdot \left(1 - \frac{3n}{100}\right) < 60$, ou seja, que $n > \frac{25}{3}$. Logo o valor mínimo de n é 9.

C) Quando $n = 1$, gasta-se a quantia de 24 reais, que é menor do que 128 reais.

Quando $1 < n \leq 10$, gasta-se a quantia de $n \cdot \left(1 - \frac{3n}{100}\right) \cdot 24$ reais. Para que Sofia compre os vasilhames de sabão D com 128 reais, é preciso que $n \cdot \left(1 - \frac{3n}{100}\right) \cdot 24 \leq 128$, ou seja, que $9n^2 - 300n + 1600 \geq 0$, ou seja, que $n \leq \frac{20}{3}$ ou $n \geq \frac{80}{3}$. Como $1 < n \leq 10$, então $n \leq \frac{20}{3}$, logo o valor máximo de $n = 6$.

Quando $n \geq 11$, gasta-se a quantia de $n \cdot \frac{70}{100} \cdot 24 \geq \frac{924}{5}$, que é maior do que 128.

Portanto, Sofia pode comprar no máximo 6 vasilhames do sabão D com 128 reais.

3ª QUESTÃO

A) Como ABC é um triângulo retângulo de área 24 cm^2, então $\frac{AB\cdot AC}{2}=24$, e, como AB mede 8 cm, então $AC=\frac{24\cdot 2}{8}=6$ cm. Como $AB=8$ cm e $AC=6$ cm, aplicando o Teorema de Pitágoras a ABC, tem-se $BC=\sqrt{AB^2+\mathrm{AC}^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10$ cm.

B) Como o triângulo ABC é retângulo com ângulo reto no vértice A, o triângulo HAC é retângulo com ângulo reto no vértice H e ABC e HAC têm o ângulo no vértice C em comum, então ABC e HAC são semelhantes e, portanto, $\frac{AC}{BC}=\frac{AH}{AB}$. Como $AB=8$ cm, $AC=6$ cm, $BC=10$ cm e $\frac{AC}{BC}=\frac{AH}{AB}$, então $AH=\frac{AB\cdot AC}{BC}=\frac{8\cdot 6}{10}=\frac{24}{5}$ cm.

C) Como os triângulos ABC e ABD têm a mesma altura relativa ao vértice A (que é AH), então $\frac{BD}{BC}=\frac{(ABD)}{(ABC)}$, sendo (ABD) e (ABC) as áreas de ABD e ABC, respectivamente. Como $(ABD)=12$ cm^2, $(ABC)=24$ cm^2, $BC=10$ cm e $\frac{BD}{BC}=\frac{(ABD)}{(ABC)}$, então $BD=\frac{10\cdot 12}{24}=5$ cm, logo o ponto D é o ponto médio de BC. Como o triângulo ABC é retângulo com ângulo reto no vértice A e D é o ponto médio de BC, então D é o circuncentro de ABC, e, portanto, $AD=BD=5$ cm.

D) Como o triângulo ABC é retângulo com ângulo reto no vértice A, o triângulo HBA é retângulo com ângulo reto no vértice H e ABC e HBA têm o ângulo no vértice B em comum, então ABC e HBA são semelhantes, e, portanto, $\frac{BH}{AB}=\frac{AB}{BC}$. Como $AB=8$ cm, $BC=10$ cm e $\frac{BH}{AB}=\frac{AB}{BC}$, então $BH=\frac{AB^2}{BC}=\frac{8^2}{10}=\frac{32}{5}$ cm. Como $BH=\frac{32}{5}$ cm e $BE=4$ cm, então $EH=BH-BE=\frac{32}{5}-4=\frac{12}{5}$ cm. Como o triângulo AEH é retângulo com ângulo reto no vértice H, $AH=\frac{24}{5}$ cm (conforme obtido no item B) e $EH=\frac{12}{5}$ cm, aplicando o Teorema de Pitágoras a AEH, tem-se $AE=\sqrt{AH^2+EH^2}=\sqrt{\left(\frac{24}{5}\right)^2+\left(\frac{12}{5}\right)^2}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$ cm.

4ª QUESTÃO

A) Para $x=12$ dm, o líquido ocupa o espaço do prisma cujo volume (em dm^3) é igual a $V_P=3^2\cdot 12=108$. Por outro lado, o volume (em dm^3) ocupado na caixa será $V_C=8\cdot 6\cdot y=48y$. Como $V_P=V_C$, tem-se que $48y=108$. Logo $y=\frac{9}{4}$ dm. O valor de a, para x entre 0 e 12 dm, é constante e igual a 3 dm.

B) O volume de T é a diferença entre os volumes de duas pirâmides, a saber, $V_T=\frac{1}{3}[9^2\cdot(10+z)]-\frac{1}{3}\cdot 3^2\cdot z$, onde z é a altura da pirâmide que completa o tronco T. Por semelhança de triângulos, podemos calcular z, a saber, $\frac{9}{3}=\frac{10+z}{z}$, e, portanto, $z=5$ dm. Logo $V_T=27\cdot 15-15=390$. O volume de P (calculado no item A) é 108 dm^3. Portanto, o volume (em dm^3) do recipiente A é $V_A=390+108=498$. Pela condição dada, tem-se que $V_A=V_B$, isto é, $48\cdot h=498$, logo $h=\frac{83}{8}$ dm.

C) Para x entre 0 e 12 dm, o valor de a é constante e igual a 3. O valor de y é encontrado igualando-se o volume ocupado em A com o volume ocupado em B, a saber, $V_A = V_B$, isto é, $9x = 48y$, e, portanto, $y = \frac{9}{48}x = \frac{3}{16}x$. Para x entre 12 dm e 22 dm, a expressão de a pode ser encontrada usando-se novamente semelhança de triângulos, a saber, $\frac{a}{3} = \frac{x-7}{5}$, isto é, $5a = 3 \cdot (x-7)$, e, portanto, $a = \frac{3}{5} \cdot (x-7)$. Para encontrar o valor de y, calcula-se o volume ocupado pelo material no recipiente A:

$$\begin{aligned} V_A = &\ \tfrac{1}{3} \cdot a^2 \cdot (x-7) - \tfrac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 5 + 108 \\ = &\ \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{9}{25} \cdot (x-7)^3 + 93 \\ = &\ \tfrac{3}{25} \cdot (x^3 - 21x^2 + 147x - 343) + 93 \end{aligned}$$

isto é,

$$V_A = \frac{3}{25} \cdot (x^3 - 21x^2 + 147x + 432).$$

Como $V_B = 48y$ e $V_A = V_B$, temos $\frac{3}{25} \cdot (x^3 - 21x^2 + 147x + 432) = 48y$, isto é,

$$y = \frac{1}{400} \cdot (x^3 - 21x^2 + 147x + 432).$$

Assim, tem-se

$$a = \begin{cases} 3 & se \quad 0 \leq x \leq 12 \\ \frac{3}{5} \cdot (x-7) & se \quad 12 \leq x \leq 22 \end{cases}$$

e

$$y = \begin{cases} \frac{3}{16}x & se \quad 0 \leq x \leq 12 \\ \frac{1}{400} \cdot (x^3 - 21x^2 + 147x + 432\,) & se \quad 12 \leq x \leq 22 \end{cases}.$$

5ª QUESTÃO

A) Utilizando as informações fornecidas, conclui-se que, se $f(x)$ tiver uma raiz inteira, essa raiz pertencerá ao conjunto $\{-2, -1, 1, 2\}$. Ao testar cada um desses valores, conclui-se que nenhum deles é raiz de $f(x)$. Portanto, $f(x)$ não possui raízes inteiras.

B) Também utilizando as informações fornecidas, conclui-se que, se $f(x)$ tiver uma raiz racional não inteira, essa raiz pertencerá ao conjunto $\{-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$. Ao testar esses valores, conclui-se que $\frac{1}{3}$ é uma raiz de $f(x)$.

C) Como $\frac{1}{3}$ é uma raiz de $f(x)$, então $f(x)$ é divisível por $\left(x-\frac{1}{3}\right)$. Efetuando essa divisão, obtém-se $f(x)=\left(x-\frac{1}{3}\right)(3x^2-6x+6)$. As demais raízes de $f(x)$ são as raízes de $3x^2-6x+6=3(x^2-2x+2)$, que são dadas por $\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}$, ou seja, são $1-i$ e $1+i$. Assim, as raízes de $f(x)$ são $\frac{1}{3}$, $1-i$ e $1+i$.