UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

COMISSÃO COORDENADORA DO VESTIBULAR

# PROCESSO SELETIVO UFES 2013

As bancas elaboradoras esperam obter da maioria dos candidatos respostas como as que seguem. No entanto, para a correção das provas, outras respostas também poderão ser consideradas, desde que corretas.

## MATEMÁTICA

### 1ª QUESTÃO

A) Seja $p$ o valor de cada prestação. Tem-se $((1324-p)\cdot 1{,}1-p)\cdot 1{,}1-p=0$, isto é, $p=1602{,}04/3{,}31=484{,}00$ reais.

B) Seja $p$ o valor de cada prestação. Tem-se $((1324\cdot 1{,}1-p)\cdot 1{,}1-p)\cdot 1{,}1-p=0$, isto é, $p=1762{,}244/3{,}31=532{,}40$ reais.

C) Sejam $j$ a taxa mensal de juros e $x=1+j$. Tem-se $((1389-529)x-529)x-529=0$, isto é, $860x^2-529x-529=0$, que é uma equação quadrática cujo discriminante é $\Delta=(-529)^2-4\cdot 860\cdot(-529)=529\cdot(529+4\cdot 860)=529\cdot 3969=23^2\cdot 63^2$. Assim, $x=\dfrac{-(-529)+\sqrt{23^2\cdot 63^2}}{2\cdot 860}=\dfrac{529+1449}{1720}=\dfrac{1978}{1720}=1{,}15$. Como $x=1+j$ e $x=1{,}15$, então $j=x-1=1{,}15-1=0{,}15=15\%$.

### 2ª QUESTÃO

A) Tem-se $f(3)=a\cdot 100^3=2\cdot 10^9$. Logo, $a\cdot(10^2)^3=2\cdot 10^9$, isto é, $a\cdot 10^6=2\cdot 10^9$. Portanto, $a=2000$.

B) Tem-se $f(t+h)=a\cdot 100^{t+h}=3\cdot a\cdot 100^t=3\cdot f(t)$. Logo, $100^h=3$, isto é, $(10^2)^h=3$, isto é, $10^{2h}=3$. Então, $2h=\log_{10}3$ e, portanto, $h=\log_{10}3/2=0{,}48/2=0{,}24$.

C) Tem-se $f(t)=a\cdot 100^t=a\cdot 2^{rt/h}$. Logo, $100^t=2^{rt/h}$, isto é, $10^{2t}=2^{rt/h}$. Então, $2t=\log_{10}2^{rt/h}=(rt/h)\log_{10}2$ e, portanto, $r=2h/\log_{10}2=2\cdot 0{,}24/0{,}30=1{,}6$.

## 3ª QUESTÃO

A) $p_{1,1} = 3/6 = 1/2$.

B) $p_{10,10} = 3^{10}/6^{10} = 1/2^{10} = 1/1024$.

C) $p_{10,1} = \left(10 \cdot 3^{10}\right)/6^{10} = 10/2^{10} = 10/1024 = 5/512$.

D) $p_{10,7} = \left(\binom{10}{7} \cdot 3^{10}\right)\Big/6^{10} = \left(\left((10 \cdot 9 \cdot 8)/(3 \cdot 2)\right) \cdot 3^{10}\right)/6^{10} = 120/1024 = 15/128$.

E) $p_{n,k} = \left(\binom{n}{k} \cdot 3^n\right)\Big/6^n = \binom{n}{k}\Big/2^n$. Assim, $p_{n,k}$ é máximo quando $\binom{n}{k}$ é máximo. Por outro lado, $\binom{n}{k+1} - \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} - \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!(n-2k-1)}{(k+1)!(n-k)!} > 0$ se, e somente se, $n - 2k - 1 > 0$ e, portanto, $\binom{n}{k+1} > \binom{n}{k}$ se, e somente se, $k < (n-1)/2$. Analogamente, $\binom{n}{k+1} < \binom{n}{k}$ se, e somente se, $k > (n-1)/2$. Logo, se $n$ é par, existe apenas um valor de $k$ para o qual $p_{n,k}$ é máximo, que é $k = n/2$, e se $n$ é ímpar, existem dois valores de $k$ para os quais $p_{n,k}$ é máximo, que são $k = (n-1)/2$ e $k = (n+1)/2$ (observe que, para $n$ ímpar, tem-se $\binom{n}{(n-1)/2} = \binom{n}{(n+1)/2}$).

**4ª QUESTÃO**

A) Sendo $2\alpha = \beta = \theta$ e $\alpha + \beta + \theta = 180°$ temos que $\alpha = 36°$, $\beta = 72°$ e $\theta = 72°$.

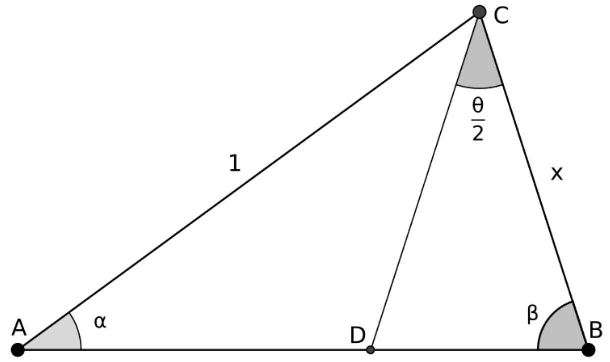
B) Ângulos $C\hat{B}D = 72°$, $B\hat{C}D = 36°$ e $C\hat{D}B = 72°$.

C) A bissetriz interna do triângulo $ABC$ relativa ao vértice $C$ determina sobre a reta $AB$ um ponto $D$ tal que

$$\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{BD} \rightarrow \frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Outra solução: Os triângulos $BCD$ e $ACD$ são isósceles. Logo $BC = CD = AD = x$. Além disso, os triângulos $ABC$ e $BCD$ são semelhantes. Logo, pela proporcionalidade entre os lados correspondentes, temos

$$\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{BD} \rightarrow \frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1).$$




D) A bissetriz interna do triângulo $ABC$ relativa ao vértice $A$ determina sobre o segmento $BC$ um ponto $M$. Sendo $ABC$ isósceles, $M$ é ponto médio de $BC$ e a bissetriz é a altura do triângulo. Logo,

$$\operatorname{sen}(18°) = \frac{x/2}{1} \rightarrow \operatorname{sen}(18°) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \rightarrow \cos(18°) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

**5ª QUESTÃO**

A) Prolongando a superfície do tronco de cone obtemos dois cones semelhantes: um deles tem base igual à base maior do tronco de cone, o outro tem base igual à base menor do tronco de cone e ambos têm o mesmo vértice. Sejam $H$ e $h$ as respectivas alturas desses cones (maior e menor). A diferença $d = H - h$ é a altura do tronco de cone. Por semelhança de triângulos temos que

$$q = \frac{r}{R} = \frac{h}{H}.$$

Portanto, $r = qR$ e $h = qH$. Assim, chamando de $\mathrm{V_T}$ o volume do tronco de cone e $\mathrm{V_C}$ o volume do cone, temos

$$\begin{aligned}\mathrm{V_T} &= \frac{1}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(R^2 H - r^2 h\right)\\ &= \frac{1}{3}\pi R^2 H\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{h}{H}\right) = \frac{1}{3}\pi R^2 H\left(1 - q^3\right).\end{aligned}$$

e

$$\mathrm{V_C} = \frac{1}{3}\pi R^2 d\,.$$

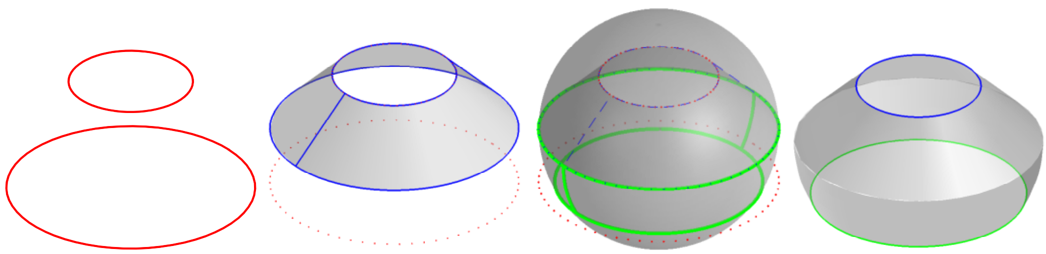
Logo,

$$\frac{\mathrm{V_T}}{\mathrm{V_C}} = \frac{\frac{1}{3}\pi R^2 H\left(1-q^3\right)}{\frac{1}{3}\pi R^2 d} = \frac{H\left(1-q^3\right)}{d} = \frac{H\left(1-q^3\right)}{H-h} = \frac{H\left(1-q^3\right)}{H-qH} = \frac{H\left(1-q^3\right)}{H(1-q)} = \frac{1-q^3}{1-q}.$$

Donde,

$$\frac{\mathrm{V_T}}{\mathrm{V_C}} = \frac{1-q^3}{1-q} = q^2 + q + 1.$$

B) O pote é construído de acordo com a ilustração abaixo.



Vamos denotar o volume do pote por $\mathrm{V_P}$. Este volume é a soma do volume de um tronco de cone, que vamos denotar por $\mathrm{V_T}$ com o volume de uma região esférica que vamos denotar por $\mathrm{V_E}$. Assim, o volume pedido é

$$\mathrm{V_P} = \mathrm{V_T} + \mathrm{V_E}.$$

O volume $\mathrm{V_T}$ pode ser calculado utilizando o item A:

$$\mathrm{V_T} = \left(q^2 + q + 1\right)\mathrm{V}_C,$$

onde $q = \frac{r}{R} = \frac{1}{2}$ e $\mathrm{V_C} = \frac{1}{3}\pi R^2 d = \frac{1}{3}\pi\, 2^2 \cdot 1 = \frac{4}{3}\pi$. Assim,

$$\mathrm{V_T} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1\right)\frac{4}{3}\pi = \frac{7}{3}\pi.$$

O volume $\mathrm{V_E}$ pode ser calculado utilizando o princípio de Cavalieri aplicado na situação seguinte. Considere os três sólidos apoiados num plano horizontal: um cilindro circular reto de raio 2cm e altura 4 cm, uma esfera de raio 2 cm e um "duplo" cone circular reto de altura 4 cm com raio da base 2 cm e vértice situado a uma mesma distância de 2 cm do plano horizontal. Cada plano horizontal (paralelo ao plano fixado) determina seções planas de áreas $\mathrm{A_{CI}}$, $\mathrm{A_{ES}}$ e $\mathrm{A_{CO}}$, respectivamente, no cilindro, esfera e cone, que satisfazem

$$\mathrm{A_{CI}} = \mathrm{A_{ES}} + \mathrm{A_{CO}}.$$

O Princípio de Cavalieri nos garante que, considerando dois planos horizontais, as porções destes sólidos compreendidas entre estes dois planos, guardam esta mesma relação para seus volumes. Logo,

$$\mathrm{V_E} = \pi\, 2^2 \cdot 1 - \frac{1}{3}\pi 1^2 \cdot 1 = 4\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{3}.$$

Assim, o volume do pote (em $\mathrm{cm}^3$) é:

$$\mathrm{V_P} = \frac{7\pi}{3} + \frac{11\pi}{3} = 6\pi.$$