UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

COMISSÃO COORDENADORA DO VESTIBULAR

PROCESSO SELETIVO UFES 2012

As bancas elaboradoras esperam obter da maioria dos candidatos respostas como as que seguem. No entanto, para a correção das provas, outras respostas também poderão ser consideradas, desde que corretas.

MATEMÁTICA

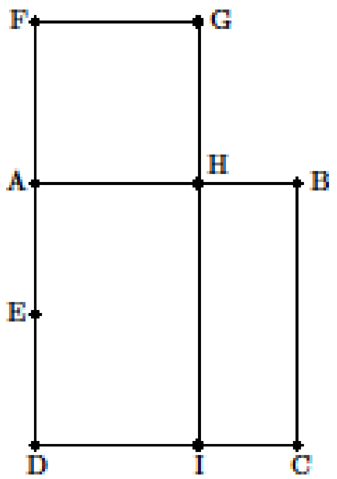
1ª QUESTÃO

A) Seja x o valor (em reais) que o Senhor Silva pagou pelo apartamento. Se o apartamento fosse vendido por $R\$\ 640.000,00$, então o lucro seria de 60%, isto é, $1,6\,x = 640000$, logo $x = 400000$. Portanto, o Senhor Silva pagou $R\$\ 400.000,00$ pelo apartamento.

B) O lucro L obtido pela venda do apartamento por $R\$\ 476.000,00$ pode ser calculado por $(1 + L)\,400000 = 476000$, então $1 + L = \frac{476000}{400000} = 1,19$, o que nos dá $L = 0,19$. Portanto, o lucro percentual pela venda do apartamento foi de 19%.

2ª QUESTÃO

A) Um esboço da figura descrita no problema é a seguinte



B) O problema nos pede que determinemos o valor numérico de certas razões e, por esse motivo, podemos fixar uma unidade de medida de comprimento que desejarmos. Consideremos, pois, que o segmento AB tenha medida $a\ cm$ e que o segmento AH tenha medida $x\ cm$, sendo a e x números reais positivos. Sabemos que $ABCD$ é um quadrado, logo o triângulo EAB é retângulo, e seus catetos EA e AB medem $\frac{a}{2}$ e a, respectivamente. Além disso, a hipotenusa EB tem a mesma medida que o segmento EF, cuja medida é $\frac{a}{2}+x$. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo EAB obtemos

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \left(\frac{a}{2}+x\right)^2,$$

donde concluímos que $a^2 = ax + x^2$ e, portanto, que $x^2 = a(a-x)$. Entretanto, a área do quadrado $AFGH$ tem medida $x^2\ cm^2$ e a área do retângulo $HBCI$ tem medida $a(a-x)\ cm^2$. Portanto, a igualdade $x^2 = a(a-x)$ significa que o valor numérico da razão entre as áreas do quadrado $AFGH$ e do retângulo $HBCI$ é igual a 1.

C) Podemos resolver a equação quadrática $x^2 = a(a-x)$, ou seja, $x^2 + ax - a^2 = 0$, e obter o valor de x em função de a. O resultado é

$$x = a\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

pois sabemos que os números reais x e a são ambos positivos. Portanto, o valor numérico da razão entre os comprimentos dos segmentos AH e AB é a fração $\frac{x}{a}$, que é igual ao número real $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

3ª QUESTÃO

A) Denominemos por x a quantidade de dias em que Lucas não acessou a internet e estudou; por y a quantidade de dias em que Lucas acessou a internet e estudou; e por z a quantidade de dias em que Lucas não estudou. Desse modo, o saldo do Lucas (em reais) é dado por $S = 20x + 5y - 15z$, pois Lucas, ao não acessar a internet e estudar (variável x) recebe R$ 20,00; ao acessar a internet e estudar (variável y) recebe R$ 5,00; ao não estudar (variável z)

ele devolve R$ 15,00. Além disso, como o período de dias considerado é de 30 dias, então $x + y + z = 30$. Considerando também que, a quantidade de dias em que Lucas acessou a internet e estudou foi igual à soma da quantidade de dias em que ele não acessou a internet e estudou com a quantidade de dias em que ele não estudou, obtemos $y = x + z$. Por último, sabe-se que ao final do período de 30 dias considerado Lucas teve um saldo de R$305,00, ou seja, $S = 305$. Deste modo, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y + z = 30 \\ x - y + z = 0 \\ 20x + 5y - 15z = 305 \end{cases}$$

Um dos modos de resolver esse sistema consiste em observar que, da segunda equação tem-se $x + z = y$, a qual, por sua vez, substituída na primeira equação nos dá $2y = 30$ e, portanto, $y = 15$. Disso segue que $z = 15 - x$. Substituindo esses dados na terceira equação obtemos $305 = 20x + 75 - 225 + 15x = 35x - 150$, donde segue que $x = \frac{455}{35} = 13$. Portanto, Lucas não acessou a internet e estudou em 13 dias desse período.

B) Em outro período de 30 dias deveremos ter novamente $x + y + z = 30$. Queremos então, determinar todos os possíveis valores de $S = 20x + 5y - 15z$ que Lucas poderá receber nesse período. Como agora Lucas estudará todos os dias desse período então $z = 0$. Portanto agora obtemos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} 20x + 5y = S \\ x + y = 30 \end{cases}$$

Escrevendo a segunda equação como $x = 30 - y$ e substituindo na primeira equação obtemos $S = 20(30 - y) + 5y = 600 - 15y$. Portanto $y = 40 - \frac{S}{15}$. Entretanto, sabemos que y é um número inteiro e que $0 \leq y \leq 30$, logo $0 \leq 40 - \frac{S}{15} \leq 30$. Consequentemente $0 \leq 600 - S \leq 450$, ou seja, $150 \leq S \leq 600$. No entanto, também sabemos que $S = 600 - 15y = 15(40 - y)$, ou seja, S é um múltiplo inteiro de 15. Concluímos então que os possíveis valores de S são os números inteiros da forma $15n$, para

$n = 10, 11, \cdots, 40$.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

COMISSÃO COORDENADORA DO VESTIBULAR

PROCESSO SELETIVO UFES 2012

4ª QUESTÃO

A) De acordo com as informações do problema, um ponto da trajetória do alvo que tenha coordenadas (x, y) verifica a equação $y = ax^2 + bx + c$, sendo a, b, c números reais fixados. Como a trajetória passa pelo ponto $A = (0, 0)$ então $c = 0$. Disto segue que a equação torna-se $y = ax^2 + bx = x(ax + b)$. Entretanto, sabemos também que a trajetória passa pelo ponto $B = (24, 0)$, daí temos $0 = 24(24a + b)$, ou seja $b = -24a$. Desse modo, a equação toma a forma $y = ax(x - 24) = ax^2 - 24ax$. Resta, portanto, apenas determinar o valor da constante a. Para isso, utilizamos o fato de que a altura máxima dessa parábola é atingida em seu vértice. As coordenadas do vértice (x_v, y_v) da parábola $y = ax^2 - 24ax$ são, respectivamente,

$$x_v = \frac{24a}{2a} = 12 \text{ e } y_v = a(12)^2 - 2(12)^2a = -(12)^2a.$$

Mas a altura máxima da trajetória é de $16\,m$, logo $-(12)^2a = y_v = 16$ e, portanto, $a = -\frac{1}{9}$. Consequentemente $b = \frac{8}{3}$. Portanto, a equação da parábola que descreve a trajetória do alvo é $y = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{8}{3}x$.

B) A equação da reta r é da forma $y = mx$, sendo m um número real fixado, pois a reta r passa pela origem $(0,0)$. A declividade dessa reta é $m = tg(30) = \sqrt{3}/3$, logo, a equação da reta r é $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$. Entretanto essa reta intersecta a trajetória parabólica no ponto $P = (x_0, y_0)$. Portanto $\frac{\sqrt{3}}{3}x_0 = -\frac{1}{9}{x_0}^2 + \frac{8}{3}x_0$. Como $x_0 \neq 0$, a solução dessa equação é $x_0 = 24 - 3\sqrt{3}$. Consequentemente, as coordenadas do ponto P são $x_0 = 24 - 3\sqrt{3}$ e $y_0 = 8\sqrt{3} - 3$.

5ª QUESTÃO

A) Utilizando algumas das relações trigonométricas elementares podemos calcular

$$cos(2x) = cos(x + x) = cos(x)cos(x) - sen(x)sen(x) = cos^2(x) - sen^2(x)$$

e concluir que

$$a_{12} = cos(2x) + 2sen^2(x) = cos^2(x) - sen^2(x) + 2sen^2(x) = cos^2(x) + sen^2(x) = 1$$

Para calcular o valor de a_{13} observamos inicialmente que $tg(-3\pi) = \frac{sen(-3\pi)}{cos(-3\pi)}$. Agora, observe que,

$$sen(-3\pi) = sen(-3\pi + 4\pi) = sen(\pi) = 0.$$

Disso segue que $tg(-3\pi) = 0$. Agora, para calcular o valor de $\sec(9\pi)$ devemos calcular o valor de $\cos(9\pi)$. Para isso, observe que,

$$\cos(9\pi) = \cos(\pi + 8\pi) = \cos(\pi) = -1.$$

Desse modo obtemos $sec(9\pi) = \frac{1}{cos(9\pi)} = -1$, e concluímos assim que $a_{13} = -1$ e $a_{12} = 1$.

B) Como tais números estão em uma progressão aritmética cuja soma é 3 segue-se que $2 + a_{22} + a_{23} = 3$, e também que $a_{22} = 2 + r$ e $a_{23} = 2 + 2r$. Disso obtemos

$$3 = 2 + a_{22} + a_{23} = 2 + 2 + r + 2 + 2r = 6 + 3r,$$

e, portanto, $r = -1$. Concluímos então que $a_{22} = 1$ e $a_{23} = 0$.

C) Observamos que podemos escrever a equação dada na forma $z(z^2 - 4z + 5) = 0$. Assim, é claro que $z = 0$ é raiz dessa equação. As outras raízes são as raízes da equação quadrática $z^2 - 4z + 5 = 0$, cujas raízes são

$$z_1 = \frac{4+\sqrt{16-20}}{2} = 2 + i \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{4-\sqrt{16-20}}{2} = 2 - i$$

Agora, sabemos que os elementos a_{31} e a_{32} são ambos positivos, e, além disso, são respectivamente a parte real e a parte imaginária de uma das raízes complexas da equação dada, logo $a_{31} = 2$ e $a_{32} = 1$. Desse modo concluímos que a matriz A tem a forma

$$A = \begin{bmatrix} b & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & c \end{bmatrix}$$

e, portanto, o seu determinante é $\det(A) = bc - 2 + 2 - 2c = bc - 2c$. Como devemos ter $b = c = \det(A)$, então $c = \det(A) = bc - 2c = c^2 - 2c$, logo $c(c-3) = 0$. Consequentemente $c = 0$ ou $c = 3$. Entretanto, sabe-se que a matriz A é invertível, logo $c = det(A) \neq 0$. Disso concluímos que $c = 3$. Assim, $b = c = 3$.